

### Alternativas para la elaboración de modelos matemáticos

José Trinidad Ulloa Ibarra  
Universidad Autónoma de Nayarit  
Jaime L. Arrieta Vera- UAG  
Aurelio Benítez Valle

#### RESUMEN

La modelación entendida como el proceso de crear una representación de un fenómeno en términos matemáticos, sea éste natural o no, con el propósito de explicarlo y predecirlo, ha existido desde los tiempos antiguos. La modelación matemática es un proceso que comprende las siguientes etapas: Identificación, Suposiciones, Construcción, Análisis, Interpretación, Validación e Instrumentación.

Coincidimos con quienes afirman que existe una separación significativa entre el conocimiento del aula y el saber práctico, es común escuchar la frase “lo que te enseñaron en la escuela no tiene sentido en el campo de trabajo”. En lo referente a la modelación matemática en el área de la biología pesquera, encontramos que se da poca importancia al tema como tal y la modelación y su aplicación se trabajan como dos entes separados y no se establece la vinculación entre ellos, en algunas instituciones la modelación se encuentra dentro de otras asignaturas, lo que repercute en profesionistas con poca o nada visión acerca del proceso de modelación. Aunado a lo anterior es común que se

introduzcan modelos preestablecidos y que al aplicarlos no representen cabalmente a la población en estudio.

La tecnología permite el acceso a un mayor número de conceptos matemáticos y sus aplicaciones, y a modelos matemáticos tradicionalmente inaccesibles en los niveles más elementales. Como resultado, el uso apropiado de la tecnología facilita que más estudiantes puedan aprender con más profundidad y usar más efectivamente un mayor número de conceptos matemáticos.

Con el uso de software es posible construir modelos matemáticos de una cierta situación y estudiarlos en forma global o analizar la influencia de los diferentes parámetros involucrados. Asimismo se pueden analizar dos o tres de sus representaciones, a saber, una representación pictórica (un dibujo geométrico), una representación gráfica (la gráfica de una función) y una representación algebraica (la ecuación de una función).

**PALABRAS CLAVE:** modelo, funciones, software, GeoGebra

## ABSTRACT

The modeling as the process of creating a representation of a phenomenon in mathematical terms, whether natural or not, in order to explain and predict, has existed since ancient times. Mathematical modeling is a process comprising the following steps: Identification, Assumptions, Construction, Analysis, Interpretation, Validation and Instrumentation.

We agree with those who say that there is a significant gap between classroom learning and practical knowledge it is common to hear the phrase "what you were taught in school does not make sense in the field of work." Regarding mathematical modeling in the area of fisheries biology, we find that little importance is given to the subject as such and modeling and its application work as two separate entities and not the link is established between them, in some institutions modeling is within other subjects, which affects professionals with little or no vision of the modeling process. Added to this is common preset models are introduced and when applied not fully represent the population under study.

The technology allows access to a greater number of mathematical concepts and their applications, traditionally inaccessible mathematical models in the most basic levels. As a result, the appropriate use of technology facilitates more students to learn more deeply and more effectively use a greater number of mathematical concepts.

With the use of software is possible to construct mathematical models of a certain situation and study globally or analyze the influence of the different parameters involved. It also can analyze two or three of its representations, namely, a pictorial representation (a geometric drawing), a graph (the graph of a function) and an algebraic representation (the equation of a function).

**KEYWORDS:** *model, functions, software, GeoGebra*

## INTRODUCCIÓN

La ciencia construye modelos o teorías para explicar los fenómenos que ocurren en nuestro alrededor. Los fenómenos son observados y se establecen relaciones, causas y explicaciones. Las observaciones se realizan sobre la evolución de magnitudes (características) con el tiempo (o con otras características) y tomando en consideración sus posibles causas (factores).

Física - fenómeno del movimiento de los cuerpos (características - espacios recorridos en relación a los tiempos invertidos en recorrerlos)

Biología - fenómeno del crecimiento (característica - talla, o peso, en relación al tiempo)

El interés por desarrollar un modelo radica en la posibilidad de reproducir un fenómeno o predecir el funcionamiento de un sistema. Los modelos pueden ser robustos, empíricos o de tipo caja negra, dependiendo del tipo de información disponible acerca del problema a resolver y de la experiencia y formación profesional del modelador.

Desde nuestra perspectiva un modelo matemático es un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traduce aproximadamente, un fenómeno en cuestión o problema de una situación real.

Una de las herramientas más interesantes que actualmente disponemos para analizar y predecir el comportamiento de un sistema biológico es la construcción y posterior simulación de un modelo matemático. Son muchas las razones que justifican la etapa de oro que hoy en día vive la modelación matemática, pero debemos de destacar, en primer lugar, el mejor conocimiento de los procesos biológicos, y en segundo lugar, el espectacular avance de las computadoras y el software matemático.

La modelación matemática, entendida como el proceso de crear una representación de un fenómeno en términos matemáticos, sea éste natural o no, con el propósito de explicarlo y predecirlo, ha existido desde los tiempos antiguos. La modelación matemática es un proceso que comprende las siguientes etapas:

1. Se debe empezar formulando las siguientes preguntas:

¿Cuál es la información que realmente necesitamos?

¿A qué se reduce ahora el problema?

2. Descripción cualitativa del modelo.

Se debe iniciar por el más simple que describa el comportamiento biológico del sistema.

Ver si los resultados que nos aporta el modelo dan respuesta a las preguntas planteadas.

3. Descripción cuantitativa del modelo.

➤ Tenemos que definir las variables y ver la manera en que están relacionadas.

➤ Debemos definir los parámetros del modelo, y asegurarnos de que cualquier otro parámetro es redundante.

4. Introducción de las ecuaciones del modelo.

Se escriben las ecuaciones, con la ayuda de un diagrama o de una tabla.

5. Análisis de las ecuaciones.

Debemos comprobar que su análisis da respuesta a las cuestiones planteadas.

Se encuentra la solución general.

6. Volver a examinar las hipótesis.

Se intenta simplificar el modelo.

Si nuestro modelo no responde a las preguntas iniciales, debemos volver a los pasos (3), (4) y (5).

7. Relacionar los resultados encontrados con hechos conocidos.

- Se ha contestado al aspecto biológico?
- Están los resultados de acuerdo con la intuición?
- Confirman los datos o los experimentos dichos resultados?

Es necesario aclarar que, dependiendo del fenómeno a modelar, es posible que no se den todas las etapas en un proceso de modelación o que algunas de ellas sean triviales, pero esta división en etapas ayuda a plantear los problemas.

Coincidimos con quienes afirman que existe una separación significativa entre el conocimiento del aula y el saber práctico (Arrieta, 2003), es común escuchar la frase “lo que te enseñaron en la escuela no tiene sentido en el campo de trabajo”. En lo referente a la modelación matemática en el área de la biología pesquera, encontramos que sólo algunas escuelas le dan atención especial al tema y que en la mayoría, la modelación se encuentra dentro de otras asignaturas, lo que repercute en profesionistas con poca o nada visión acerca del proceso de modelación. Aunado a lo anterior es común que se introduzcan modelos preestablecidos y que al aplicarlos no representen cabalmente a la población en estudio.

La modelación no debe verse como un tema más que los estudiantes deben aprobar, sino que los procesos de modelación deben servir para poner de manifiesto el poder de las matemáticas en el desarrollo de modelos abstractos basados en datos dados y en suposiciones; para apreciar cómo se puede usar el

modelo para predecir resultados; para crear una conciencia crítica de los defectos de cualquier modelo dado y de las suposiciones sobre las que se basa, con la finalidad de apreciar los modelos y las técnicas matemáticas utilizadas.

En el sistema educativo nacional un problema común es la insuficiencia de recursos económicos para satisfacer la cantidad de necesidades que existen en los planteles, lo cual repercute en la compra de paquetes de cómputo específicos a la modelación. Esto ha orillado a la búsqueda de alternativas que subsanen esta deficiencia, una solución práctica es el uso del software libre que se adecue a las necesidades específicas de la tarea a desarrollar, en este caso GeoGebra presenta características que lo hacen adecuado para la modelación.

Con el uso de software específicamente con GeoGebra es posible construir modelos matemáticos de una cierta situación y estudiarlos en forma global o analizar la influencia de los diferentes parámetros involucrados. De igual forma se pueden analizar dos o tres de sus representaciones, a saber, una representación pictórica (un dibujo geométrico), una representación gráfica (la gráfica de una función) y una representación algebraica (la ecuación de una función).

El uso de los recursos tecnológicos promueve a que se conciba la matemática como una actividad que socialmente debe compartirse sin descuidar su característica de ciencia formal o exacta para lograr así un aprendizaje significativo (Novak y Govin, 1988).

### METODOLOGÍA

Las prácticas de modelación que se han elegido se enfocan en las practicas que se desarrollan en las comunidades de biólogos e ingenieros pesqueros en interacción con fenómenos (físicos, químicos, sociales, etc.), conjeturando y realizando predicciones acerca de ellos utilizando modelos. En especial nos centraremos en los fenómenos en los que se trabaja con Modelos Determinísticos - Estáticos. Estas prácticas no solo se han ejercido históricamente, de la misma forma se ejercen en el plano profesional y en los problemas cotidianos actuales.

Las actividades de modelación las distinguimos de quienes la usan con la finalidad de enseñar a modelar, a desarrollar teorías de modelación o hacer uso de esta. Reproducimos y analizamos prácticas de modelación con la intencionalidad explícita de desarrollar procesos de matematización en el aula.

Nuestra perspectiva asume a las prácticas sociales como la base de nuestros diseños, en particular tomamos como base a las prácticas centradas bien en los modelos numéricos, bien en modelos gráficos o analíticos (Arrieta, 2003).

Los biólogos pesqueros enfrentan varios problemas para describir el crecimiento

individual de los organismos sujetos a explotación comercial. Primero, deben seleccionar un modelo que mejor describa los datos de longitud a la edad y para esto tienen una gran cantidad de ellos. Los modelos son llamados por los apellidos de quienes los han propuesto, Bertalanffy, Gompertz, Richards entre otros (Schnute 1981).

Una vez que se ha decidido por uno, se deben ajustar los parámetros del modelo a utilizar. Los criterios de ajuste más comunes son la minimización de la suma de los residuales al cuadrado y la obtención de la máxima verosimilitud (Haddon 2001). Posteriormente, si se ha elegido más de un modelo, se debe contar con un criterio para usar el más adecuado.

Derivado de lo anterior, surgen tres preguntas:

- ¿Cuál es el modelo que mejor describe el crecimiento individual de la especie bajo estudio?
- ¿Cómo elijo el modelo? y
- ¿Qué pretendo resolver con mi estudio de crecimiento individual?

Esto podemos esquematizarlo como se muestra en la figura No. 1.

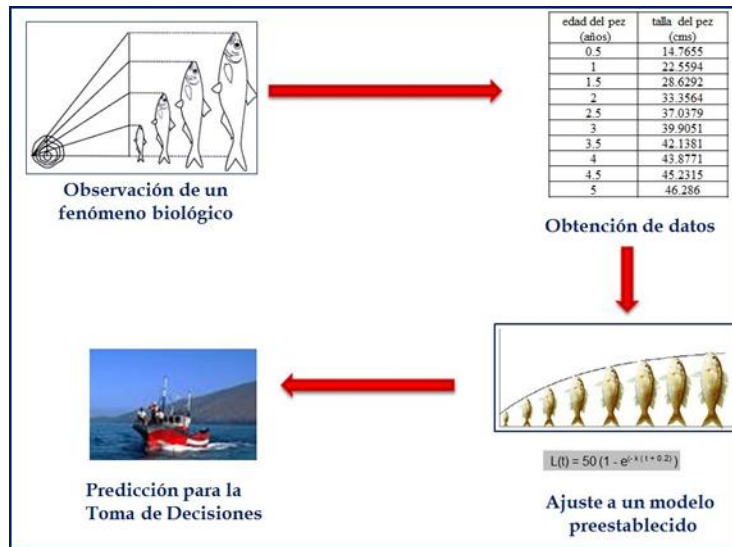


Figura 1. La práctica de Modelación en las Comunidades de profesionales de la pesca

Como ya se citó, el procedimiento de modelación utilizado puede llevar a errores ya que no considera las características específica de la población en estudio, sino que “mete” a todas en modelos predeterminados.

Nuestra propuesta se base en el análisis de cada conjunto de datos que se tenga y que a partir de ellos se ajuste un modelo en particular. El procedimiento se describe a continuación:

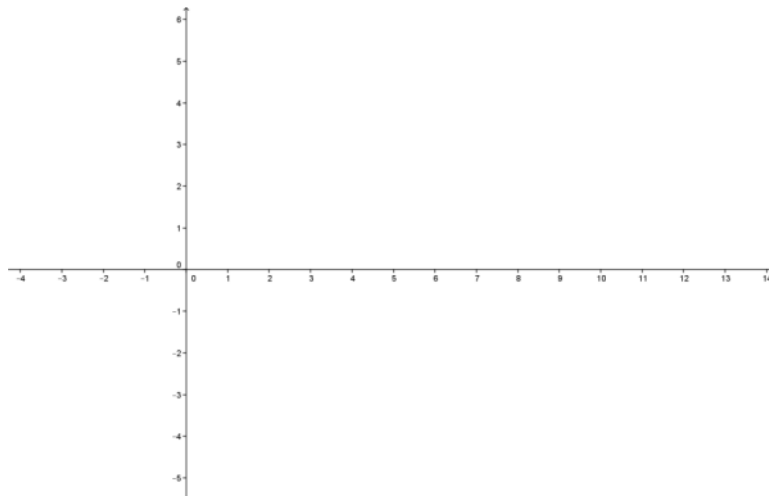
Se realizó un estudio sobre el crecimiento de un cultivo de mohos. En la tabla de abajo se muestra la población de mochos en intervalos de una hora, se desea modelar utilizando el GeoGebra:

No.	Tiempo (horas)		No.	Tiempo (horas)
1	9		10	441
2	18		11	513
3	29		12	559
4	47		13	594
5	71		14	629
6	119		15	640
7	174		16	651
8	257		17	655
9	350		18	659

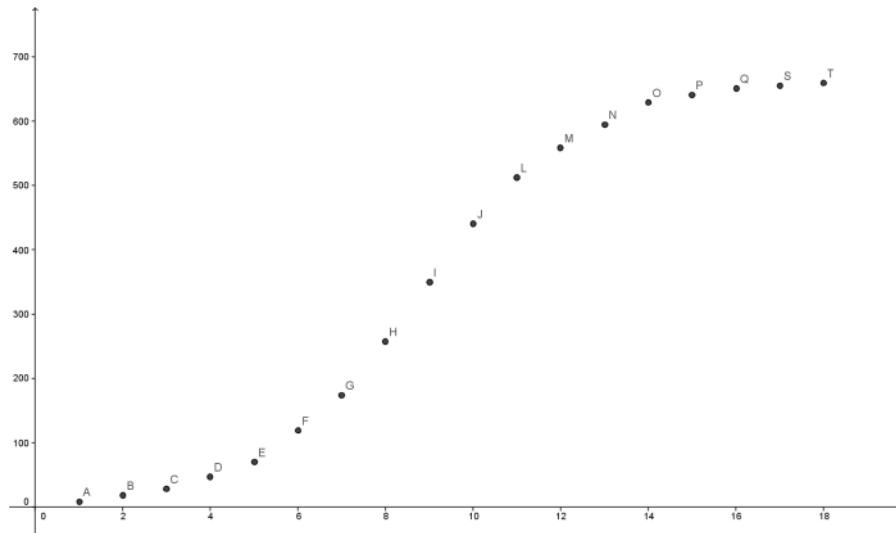
## Alternativas para la elaboración de modelos

---

1. Se introducen los datos al programa.



2. Se ajusta la pantalla para visualizar todos los datos y poder hacer la propuesta de un modelo específico.

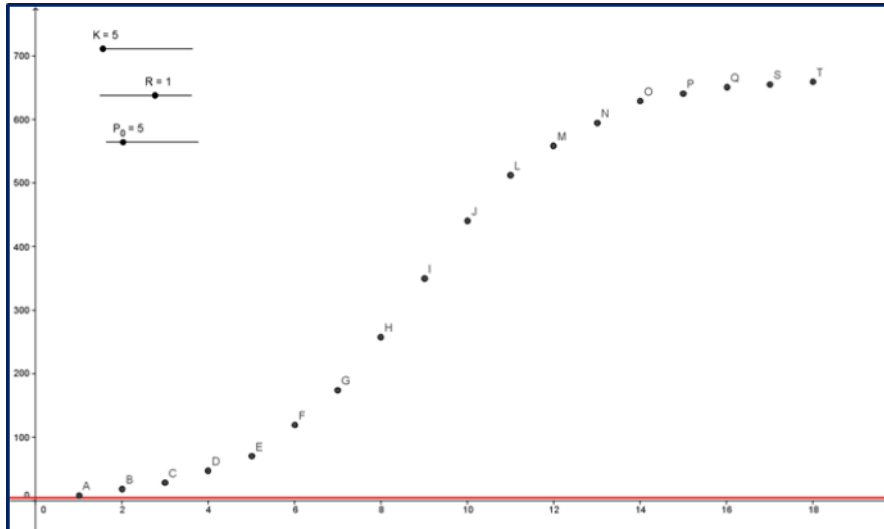


3. Con base en la gráfica, se propondrá un modelo logístico del tipo:

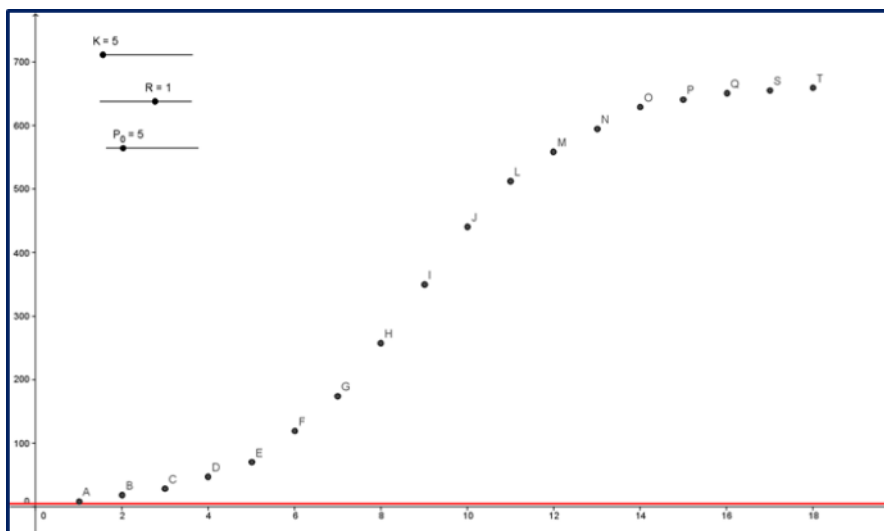
$$f(x) = \frac{K P_0 e^{Rx}}{K + P_0 (e^{Rx} - 1)}$$

Se crean deslizadores  $K = 5$ ,  $R = 1$  y  $P_0 = 5$ , los dos primeros serán deslizadores que permitirán el ajuste a la curva.

4. Se realiza el movimiento de los deslizadores, los valores de éstos deberán ajustarse conforme se requiera, ya que el programa los tiene definidos de - 5 a 5.



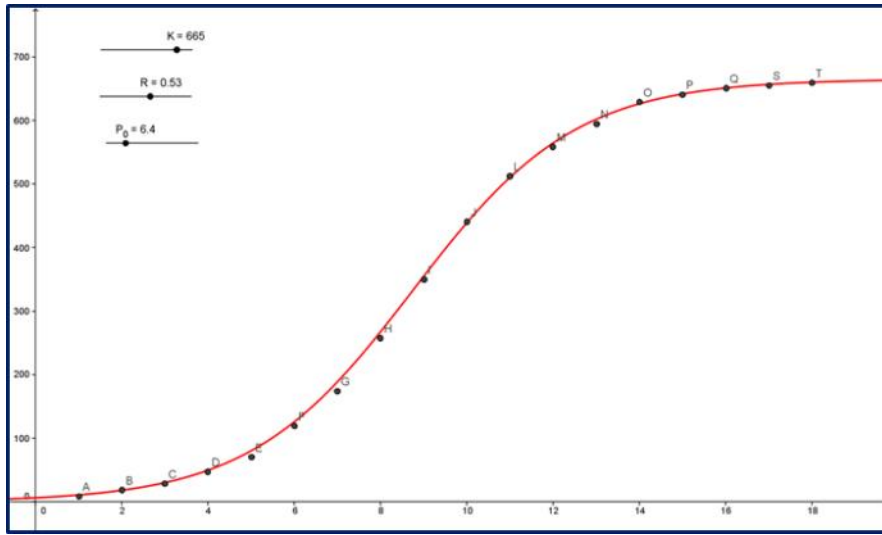
En la barra de entrada se introduce la ecuación:



4. Se realiza el movimiento de los deslizadores, los valores de éstos deberán ajustarse conforme se requiera, ya que el programa los tiene definidos de - 5 a 5.



## Alternativas para la elaboración de modelos

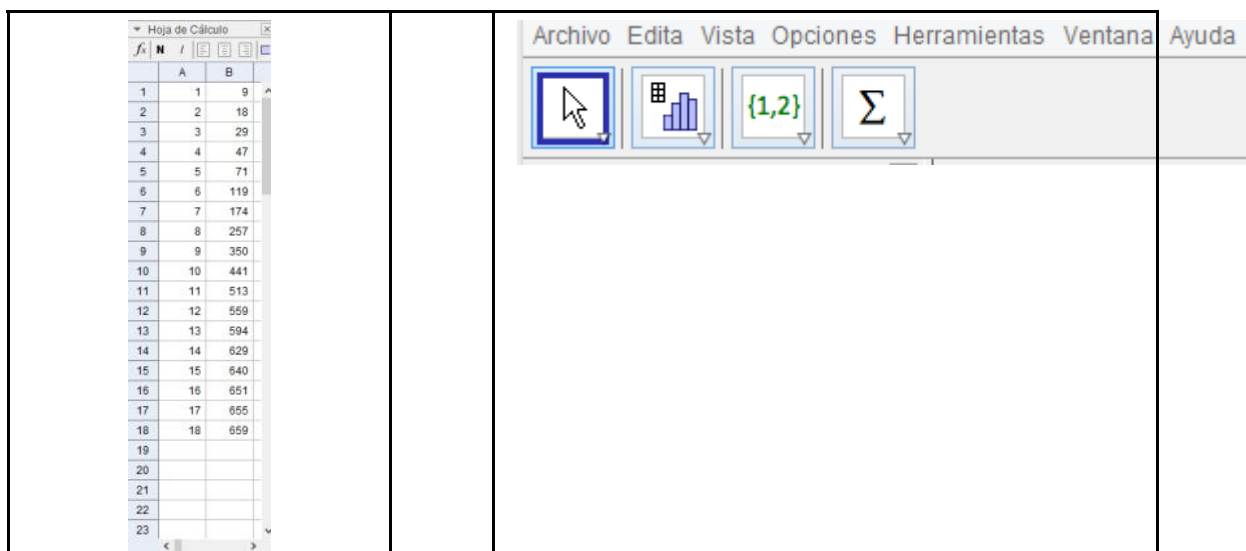


Como se puede observar, los valores de R y K que ajustan los datos son:  
K = 660 y R = 0.5, con lo que el modelo es

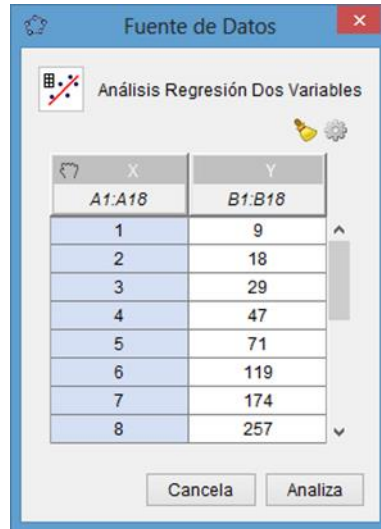
$$f(x) = \frac{660(9)e^{0.5x}}{660 + 9(e^{0.5x} - 1)}$$

Entre las ventajas que presente el GeoGebra además de la actualización continua que se hace del mismo está la de contar con la posibilidad de trabajar con una hoja de cálculo semejante a la de Excel, en ella se pueden introducir los valores observados y utilizar las herramientas de ésta parte del programa, como se describe a continuación:

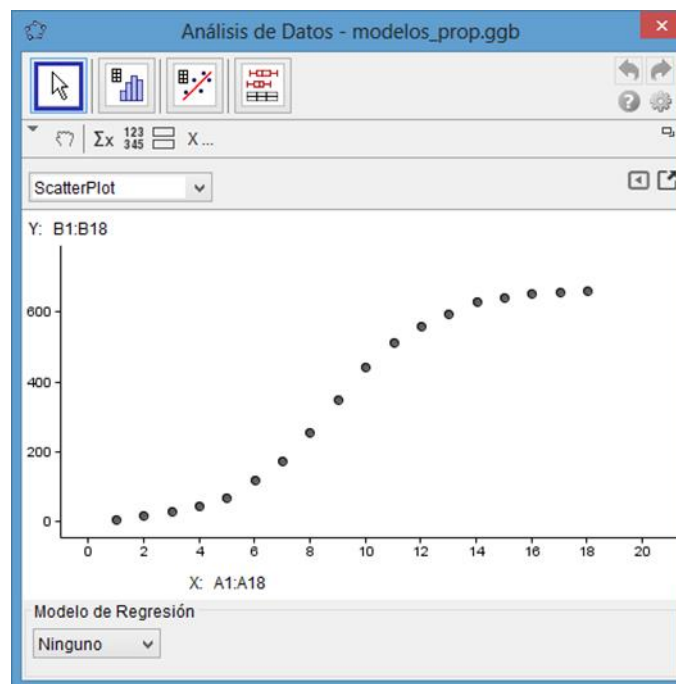
En el menú Vista, active la opción Hoja de Cálculo e introduzca los datos, la vista de la barra de iconos al estar activada la hoja se presenta a continuación



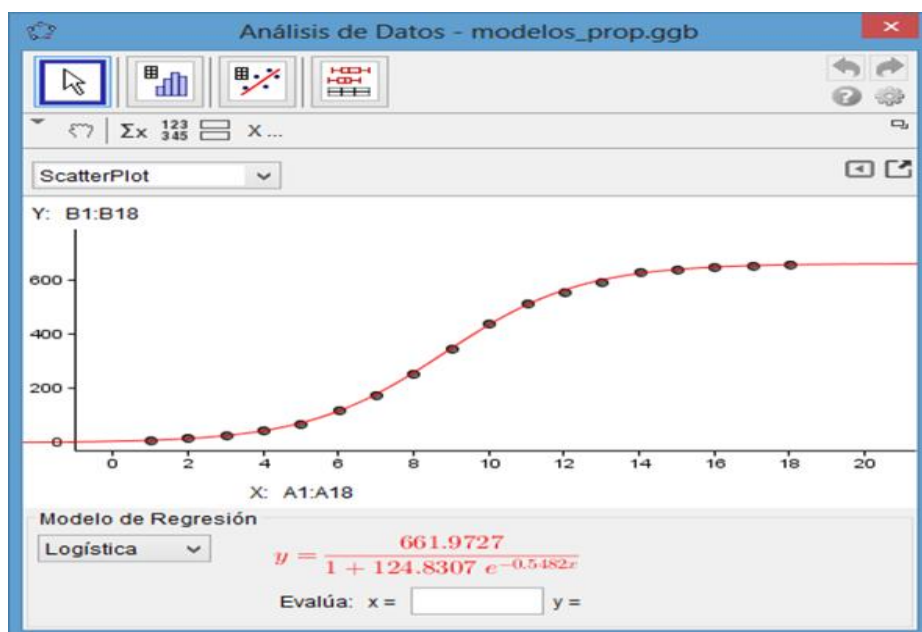
De un clic sobre el icono “Análisis una variable” (segundo de izquierda a derecha) y seleccione la opción Análisis regresión dos variables, con lo que aparece una caja de diálogo:



De clic sobre el botón Analiza



En el botón Ninguno, nos presenta algunas posibilidades de realizar la correlación, en nuestro caso seleccionamos Logística y aparece:



Con lo que nos presenta el modelo que representa los datos del fenómeno observado con mayor precisión que cuando ajustamos por medio de los deslizadores.

### RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En los trabajos realizados por el grupo de investigación de la línea llamada las prácticas sociales y la construcción social del conocimiento, se han dado evidencias de la existencia de prácticas del uso de las matemáticas, que no siempre son reconocidas por los actores de la comunidad (Ulloa, Arrieta, 2008), además se ha mostrado también que no son las mismas prácticas, por lo que, la hipótesis que gira alrededor de investigaciones desarrolladas a la par de esta es, que el análisis de las prácticas y su

deconstrucción, puede ser un vínculo entre las comunidades extraescolares y comunidades escolares. Consideramos que mediante la deconstrucción de las prácticas se podría encontrar la esencia de las mismas para reconstruirlas mediante diseños de aprendizaje, y así llevarlas al sistema educativo, esto sería el vínculo entre las prácticas del uso de las matemáticas y las prácticas escolares de las matemáticas.

El concepto de deconstrucción según el diccionario de la Real Academia Española es la acción y efecto de deconstruir. Desmontar un concepto o una construcción intelectual por medio de su análisis, mostrando así contradicciones y ambigüedades. El término deconstrucción es la traducción que propone Derrida (1985) del término alemán *Destruktion*, de Heidegger.

Derrida estima esta traducción como más pertinente que la traducción clásica de "destrucción" en la medida en que no se trata tanto, dentro de la deconstrucción de la metafísica, de la reducción a la nada, como de mostrar cómo ella se ha abatido.

Para fines de nuestra investigación y desde nuestro punto de vista, consideramos a la deconstrucción como, un medio para mostrar o encontrar la intencionalidad de una práctica constituida.

De este modo podemos dividir la deconstrucción de la siguiente manera:

1. La búsqueda de las intenciones (el ¿por qué las emplean así? y el ¿por qué funcionan?)
2. Los argumentos que los validan (¿Qué sustento tienen? ¿De dónde proviene?)

Algunas dificultades que se presentan ante este estudio es el hecho de no pertenecer a la comunidad en donde se ejerce la práctica, lo cual provoca dificultades para entender las herramientas usadas en las comunidades, así como para encontrar la intencionalidad de esta práctica. Sin embargo se espera mostrar evidencias acerca de esta hipótesis, y encontrar una forma adecuada para investigar este problema.

En general creemos que una de las características de las prácticas sociales, la

intencionalidad, se modifica de acuerdo al ejercicio de la práctica, lo cual establece una relación determinante entre ésta y la constitución de las prácticas, esto tiene que ver con la evolución de las prácticas y a su vez con la deconstrucción de las mismas.

Consideramos que para la deconstrucción de las prácticas es necesario conocer la intencionalidad de la práctica, consideramos la posibilidad de que en algunas comunidades existan prácticas constituidas que tengan una si bien es cierto que tienen una intención, esta no es la misma que al inicio de la práctica.

Con respecto a lo anterior creemos que las prácticas pasan por un ciclo, primero son prácticas sociales por que generan entre otras cosas organización social, luego mediante el ejercicio de ésta, evolucionan de manera que en algún momento llega a su constitución, esto se determina por que durante este proceso de evolución las intenciones de la práctica cambian.

Por lo expuesto anteriormente creemos que la experiencia y la deconstrucción de las prácticas sociales pueden ser un vínculo entre las dos esferas en las cuales se enmarca nuestra problemática.

### Referencias bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Disertación doctoral publicada, Cinvestav, México.

Derrida, J. (1985). Carta a un amigo japonés. En J. Derrida (Ed), *¿Cómo no hablar? Y otros textos*. Suplementos Antrhopos, 13, 86 - 89.

Haddon, M. 2001. *Modelling and quantitative methods in fisheries*. Chapman and Hall/ CRC, Florida, EE.UU.

Novak, J y Govin, D. (1998). *Aprendiendo a aprender*. Barcelona: Martínez Roca.

Schnute, J. 1981. A versatile growth model with statistically stable parameters. *Can. J. Fish. Aquat. Sci.* 38: 1128-1140.

Ulloa, J.; Arrieta, J. (2009). *Los modelos exponenciales: construcción y deconstrucción*. ALME 2009.

