

Modelos matemáticos no lineales del
crecimiento de la
Carpa común (*Cyprinus carpio* Linnaeus,
1758)

José Trinidad Ulloa Ibarra^{1,2}, María Inés
Ortega Arcega², Gerónimo Rodríguez
Chávez¹, Aurelio Benítez Valle¹

Recibido: 12 de agosto de 2015

Aceptado: 20 de octubre de 2015

Resumen

El crecimiento animal es uno de los aspectos más importantes al momento de evaluar la productividad en las explotaciones de especies animales. Para medir el crecimiento animal se han usado diferentes modelos matemáticos lineales e no lineales, eligiéndolos por su bondad de ajuste y la facilidad de interpretación biológica de sus parámetros. El crecimiento de organismos acuáticos es el aspecto más importante en el desarrollo de las actividades tendientes a su aprovechamiento, entre ellas la acuicultura, por lo cual es importante tener conocimientos suficientes sobre este proceso.

Abstract

Animal growth is one of the most important when evaluating farm productivity aspects of animal species. Measurement of animal growth have been different linear and nonlinear mathematical models, choosing they for their adjustment and the feasibility for biological interpretation of their parameters. The growth of aquatic organisms is the most important in the development of activities to its use, including aquaculture aspect, so it is

important to have enough knowledge about this process.

Palabras clave: modelos, crecimiento, carpa

Key words: models, growth, carp

Introducción

El aprovechamiento de los recursos naturales renovables tiene implicaciones alimentarias, económicas, sociales, ecológicas y políticas, razón por la cual, las generaciones actuales tenemos un compromiso ético y moral de trascendencia histórica en el sentido de aprovechar tales recursos de forma racional y sustentable. El caso particular de los recursos pesqueros es en extremo complejo, ya que se combinan condiciones de incertidumbre sobre las condiciones biológicas, ecológicas y ambientales (Gulland, 1983).

La carpa es el pez cultivado más antiguo del mundo. Se sabe que fue cultivado en China hace más de 2000 años; el arte del cultivo de carpas fue popularizado en Europa por los romanos. De los estanques de cultivo, la carpa se ha propagado ampliamente a aguas naturales. La carpa introducida en Finlandia es la variedad más antigua cultivada en estanques. En Finlandia se considera como un pez para aguas sumamente eutróficas, ya que crece mucho más rápido que otros ciprínidos, aumentando hasta 1 kg en un año!

1 ENIP - UAN

2 Programa de Matemáticas, ACBI, UAN

También es un excelente pez para la mesa, pero se debe mantener en agua de manantial durante varios días antes de matarlo.

La producción de carne de peces constituye una fuente de proteína animal de importancia a nivel nacional y mundial, siendo relevante las diversas especies de tilapia cultivadas a diferentes niveles de intensificación y sujetas a diferentes sistemas de producción (El-Sayed, 2006).

El estudio de procesos biológicos de interés productivo y económico, como el crecimiento animal, viene siendo abordado desde hace algunas décadas empleando la modelación matemática apoyada en la actualidad por la utilización de software específico. La modelación permite predecir con cierta exactitud el crecimiento de los animales y la exploración de la dinámica de su composición corporal, junto con la determinación de la eficiencia de flujo de materia y energía en el animal. Dichos desarrollos han permitido la construcción de modelos nutricionales que han apoyado la toma de decisiones dentro del sistema productivo especialmente en el componente nutricional (Thornley y France, 2007; Dumas et al., 2010). Estos desarrollos indican una evolución de modelos empíricos que simplemente describen la trayectoria de crecimiento de los animales hacia modelos mecanísticos que ayudan a elucidar el flujo de nutrientes dentro del animal. En el caso de peces tropicales se presenta un atraso en esta área del conocimiento en comparación con peces de zonas templadas como los salmónidos y en su conjunto los peces

presentan un rezago en la industria animal en comparación con especies terrestres como los pollos de engorde y los cerdos (Aguilar, 2010).

Teniendo en cuenta los anteriores antecedentes, el objetivo general del trabajo planteó estudiar los modelos no lineales asociados al crecimiento de la Carpa Común. Adicionalmente se emplearon alternativas gráficas mediante la utilización de software como herramientas de análisis para el desarrollo de un modelo general.

Características de la especie

Tamaño: 35–60 cm, 1–3 kg, máx. hasta 18 kg.

Aspecto: Es un pez robusto con cuerpo grande, aunque no tan grande como el carpín de lago, al que se le parece mucho. La carpa capturada en lagunas siempre es mucho más grande que el carpín proveniente de la misma agua, que rara vez llega a 15 cm de largo. La carpa también se diferencia de sus primos el carpín y la carpa prusiana por la forma de su larga aleta dorsal, cuyo borde anterior es angular, mientras que el de las otras dos especies es más redondeado. Un rasgo característico de la carpa lo constituyen los dos pares de barbillas, el par superior es pequeño y apenas perceptible, el par inferior es largo y prominente. La tenca y el gobio también tienen barbillas, pero estas dos especies difieren de la carpa en otros aspectos: la tenca con su aleta dorsal corta y sus escamas diminutas. Se conocen diversas formas de carpas, que se distinguen por sus escamas, o la falta de ellas. La que se encuentra con mayor frecuencia es la

carpa totalmente cubierta de escamas; las escamas son bastante grandes y tiene 33–40 a lo largo de la línea lateral. La carpa espejo tiene escamas muy grandes, como placas, dispersas. Hay otra forma que tiene una hilera continua de escamas altas y angostas a lo largo del flanco, mientras que la carpa coreácea no tiene ninguna escama.

Coloración: Dorso y aletas generalmente oscuras, flancos de color cobre o dorados.

Reproducción: La carpa se reproduce cuando la temperatura del agua supera los 14 grados. La carpa nacida naturalmente en Finlandia no crece lo suficiente rápido para sobrevivir su primer invierno. Todas las carpas de Finlandia se han introducido ya sea como ejemplares de un año o como peces que tengan 2 veranos y pesen 100–200 g.

Área de estudio

Esta investigación se desprende de un proyecto para la elaboración del plan de manejo para desarrollar la pesca en el embalse del proyecto hidroeléctrico la Yesca. El muestreo y mediciones corresponden a un periodo que inicia en febrero y termina en diciembre de 2010.



Figura 1. Carpa común (*Cyprinus carpio*)

Presa La Yesca

La Presa La Yesca es una presa y central hidroeléctrica ubicada en el cauce del Río Grande de Santiago en el municipio de Hostotipaquillo, Jalisco y la La Yesca, Nayarit. Tiene una capacidad para generar 750

megawatts de energía eléctrica, con un embalse aproximado a 1,392 millones de metros cúbicos. Tuvo un costo aproximado de 768 millones de dólares. Esta presa es parte del sistema hidrológico del Río Grande de Santiago formado por la Presa Aguamilpa y la Presa El Cajón que en conjunto generan 4,300 MW. Fue inaugurada el 6 de noviembre de 2012.

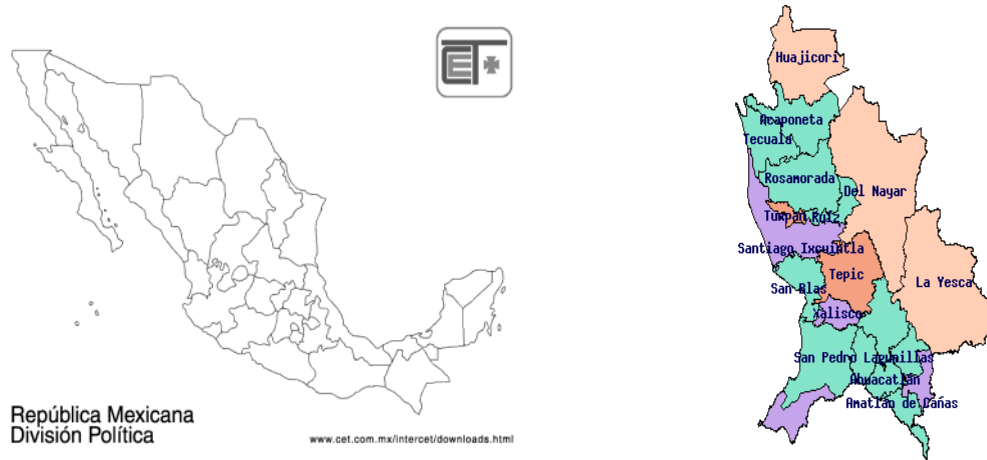


Figura No.2 Presa Hidráulica La Yesca

Localización:

El P. H. La Yesca, se localiza sobre el río Santiago a 105 km al NW de la Ciudad de Guadalajara y a 22 km al NW de la población de Hostotipaquillo, Jal. Forma parte del límite entre los estados de Nayarit y Jalisco, constituido legalmente por el cauce del río Santiago. La boquilla del P. H. La Yesca se localiza a 90 km, en línea recta, al noroeste de la ciudad de Guadalajara, a 4 km aguas abajo de la confluencia de los ríos Bolaños y Santiago y sobre el cauce de este último; sus coordenadas geográficas son: 21° 11' 49" Norte 104° 06' 21" Oeste.

Materiales y métodos

Descripción de los modelos

Los modelos considerados en este reporte son los relativos a la relación longitud total – peso total y altura del cuerpo – peso total, ambos del tipo alométrico, cuya ecuación de alometría puede caracterizarse como la ecuación de alometría de Ricker (1975)

$$P = a \cdot L_t^b$$

donde: “P” es el peso total del pez sin eviscerar; L_t es la longitud total; “a” es la intersección del eje de las ordenadas y “b” es el exponente de la ecuación; b es una constante positiva y a es una constante que puede ser positiva, negativa o cero. Se habla de isometría cuando $b=1$, de alometría positiva cuando $b>1$, y de alometría negativa cuando $b<1$; ver a continuación).

Isometría. La proporción (L_t/P) que relaciona la magnitud del órgano en cuestión (X) con respecto al tamaño total (u otra medida de referencia, Y) es la misma cualquiera que sea el tamaño de los individuos comparados (podría interpretarse que la isometría es la “no alometría”, o bien que es un tipo especial de relación alométrica).

Positiva. La proporción L_t/P es mayor cuanto mayor es el tamaño corporal del individuo.

Negativa: La proporción L_t/P es menor cuanto mayor es el tamaño corporal del individuo. (Atención, cuidado con este término, no significa necesariamente correlación negativa).

Desarrollo y formulación del modelo

Los datos colectados para la relación Altura del cuerpo (cm) -Peso total (gr), Perímetro del Opérculo (cm) – Peso Total (gr) presentan el siguiente comportamiento:

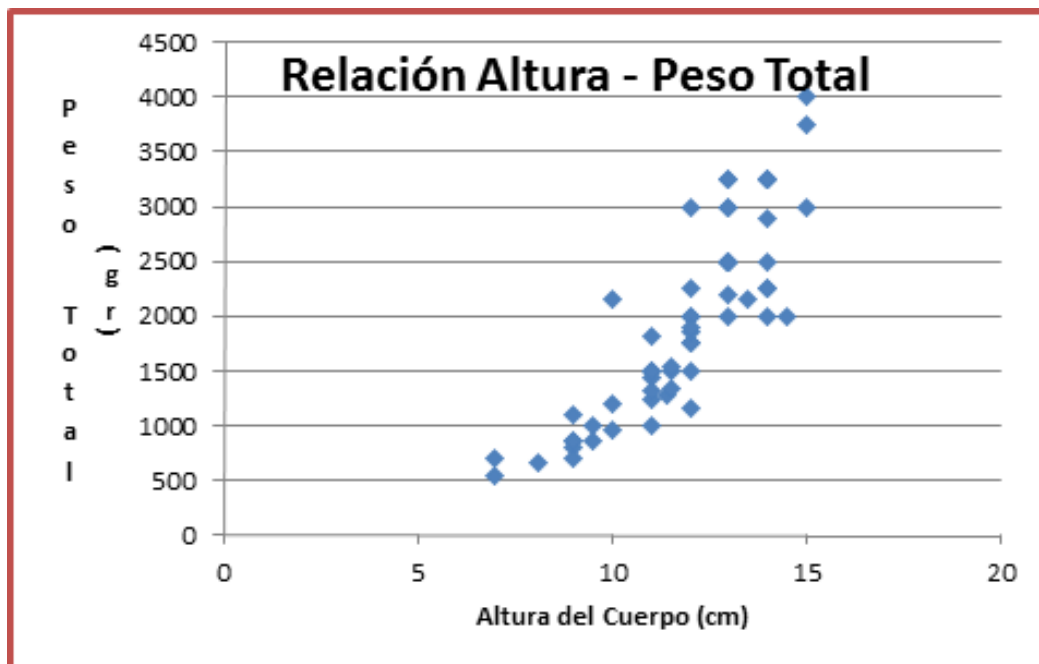


Figura No. 3. Diagrama de Dispersión Altura - Peso Total

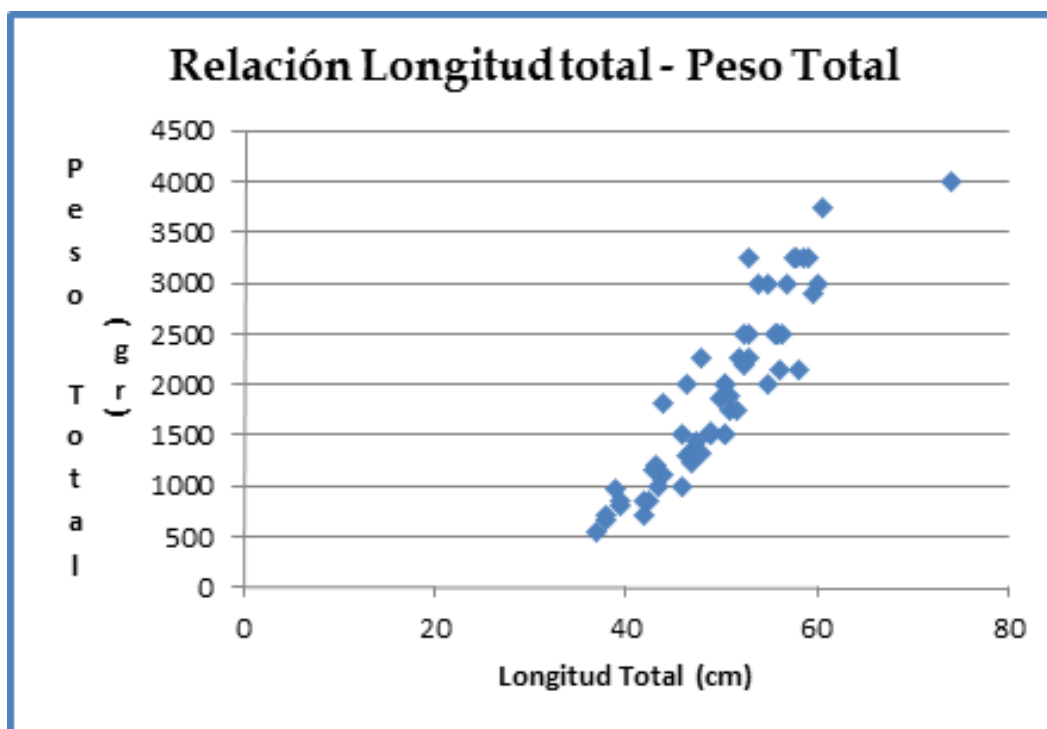


Figura No. 4. Diagrama de Dispersión Longitud Total - Peso

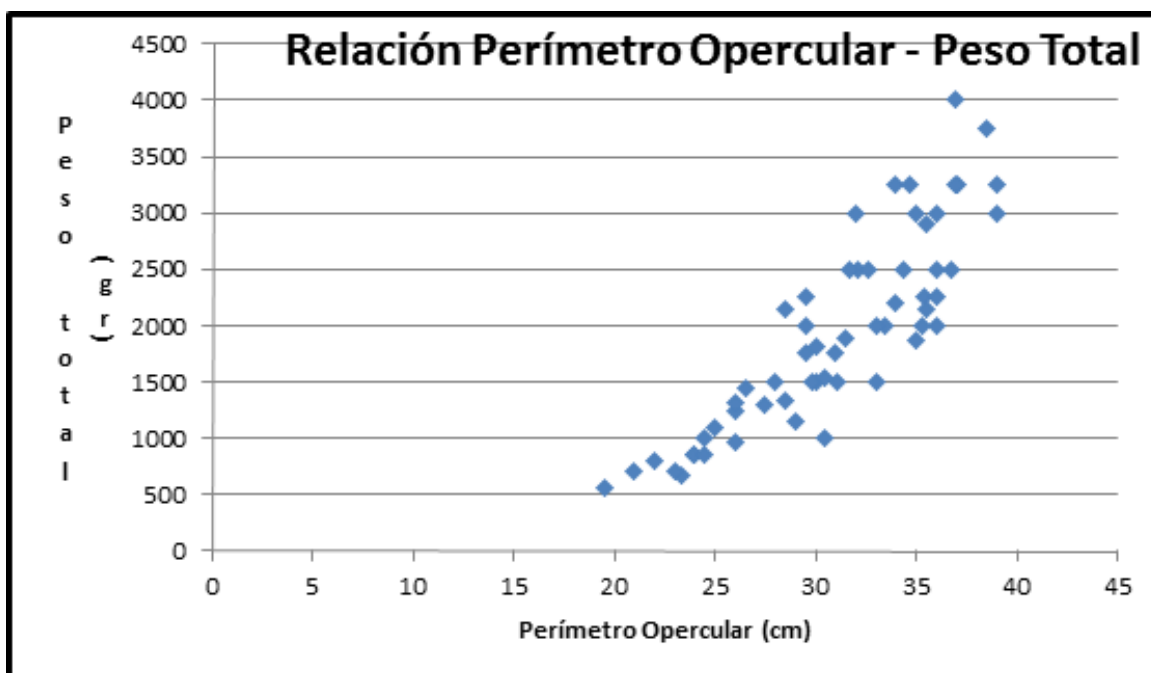


Figura No. 5. Diagrama de Dispersión Perímetro Opercular - Peso Total

Siguiendo el procedimiento descrito en (Ulloa, Benítez y Rodríguez, 2008), utilizando la hoja de Excel, mediante el procedimiento directo se tiene:

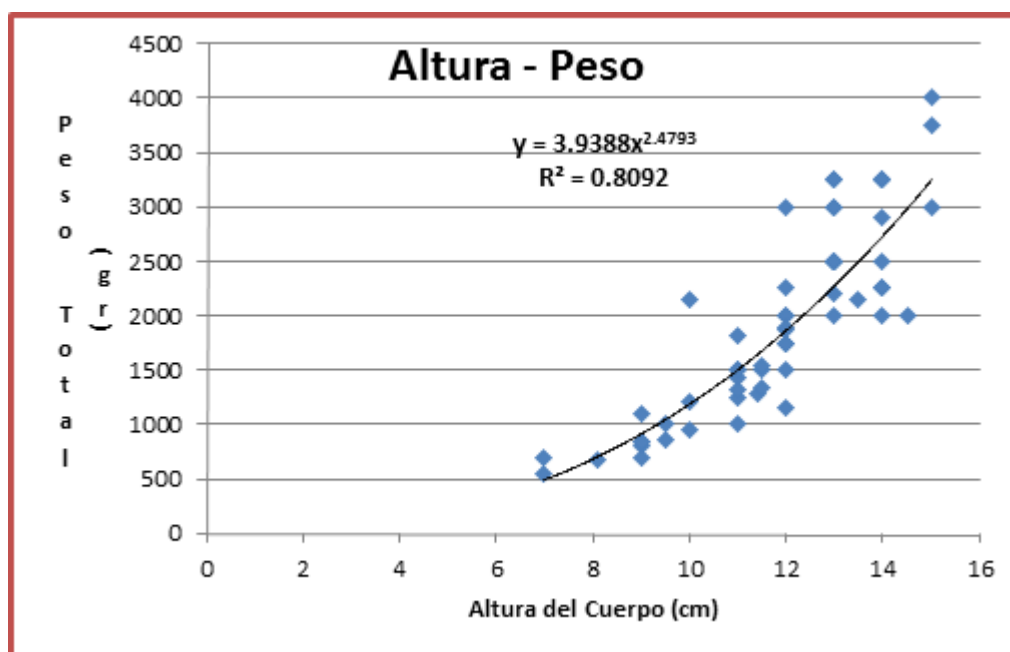


Figura No. 6. Diagrama de ajuste Altura - Peso

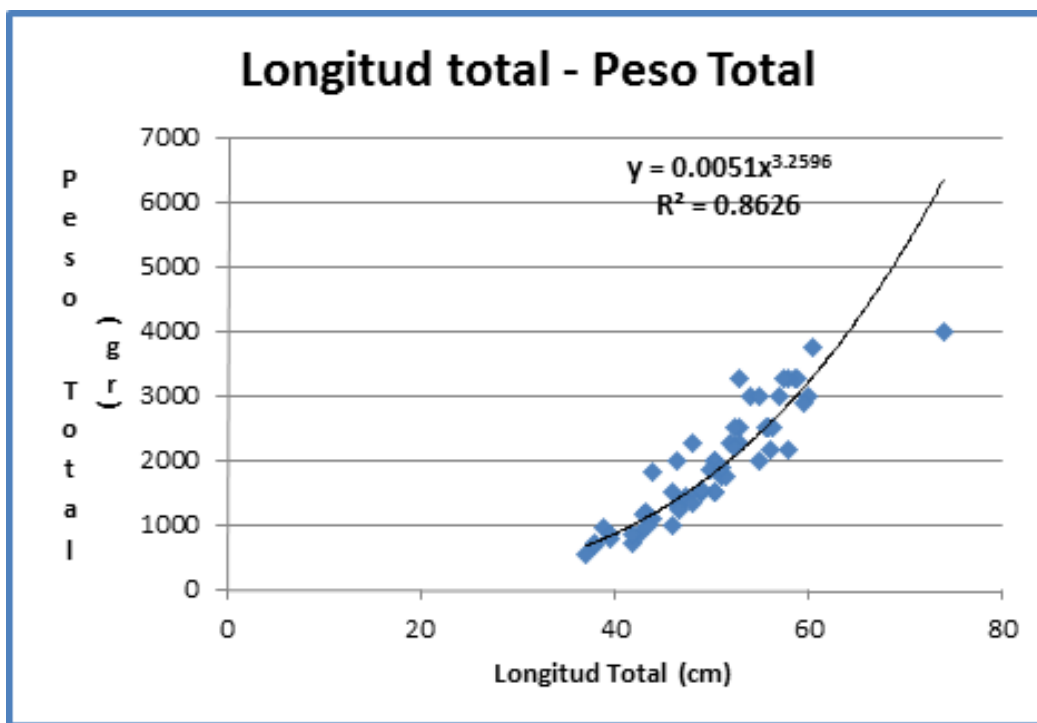


Figura No. 7. Diagrama de ajuste Longitud total - Peso total

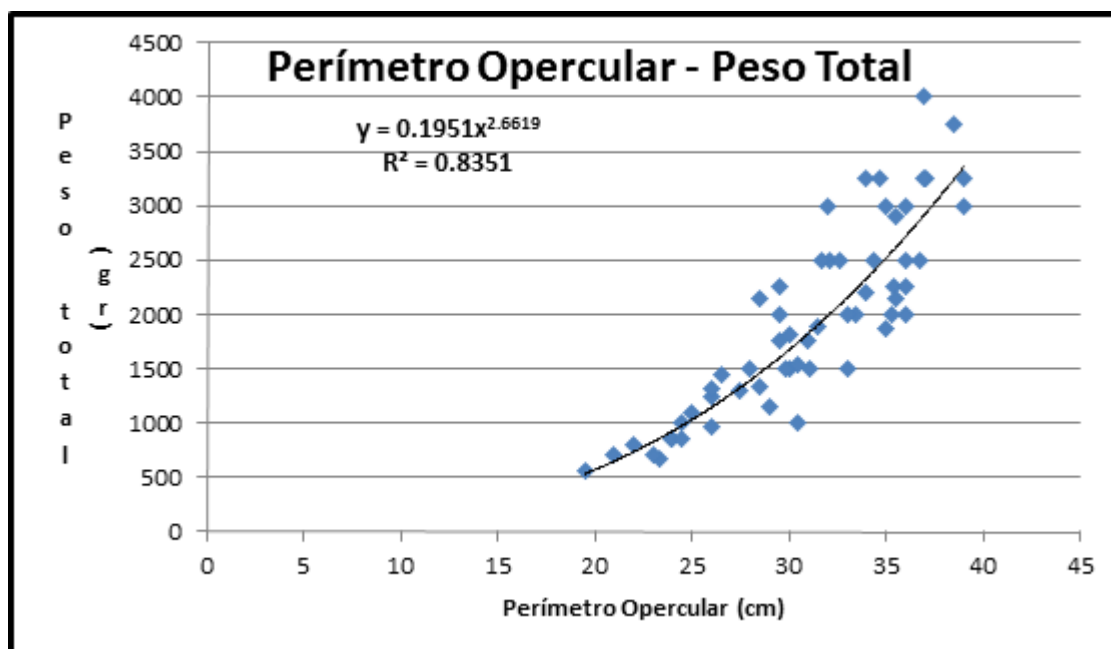


Figura No. 8. Diagrama de ajuste Perímetro opercular - Peso total

Resultados

Las relaciones biométricas proporcionan información acerca de la manera de cómo varían entre sí las dimensiones del cuerpo de los organismos, lo que es afectado por el medio ambiente (Chavance et al., 1984).

En la muestra analizada, que estuvo constituida por 118 ejemplares se reportaron tallas ubicadas entre 37 - 74 cm la Lt promedio de la muestra total fue de 50.21 cm

Como ya se indicó el material utilizado procede de muestreos realizados de Febrero a Diciembre de 2010 mediante redes agalleras, a partir de la captura comercial y deportiva de tilapia, en la presa La Yesca.

El total de individuos estudiados fue de 599, de los cuales se tomaron los primeros 118 para el objeto del presente documento. Con ellos se hicieron las siguientes relaciones biométricas:

Altura - Peso Total: (Alt - Pt)

Longitud total - peso total (Lt - Pt)

Perímetro Opercular - Peso Total (Po - Pt)

Como una alternativa a la utilización de Excel, puede utilizarse el GeoGebra tomando como base lo descrito en Ulloa y Rodríguez, 2013.

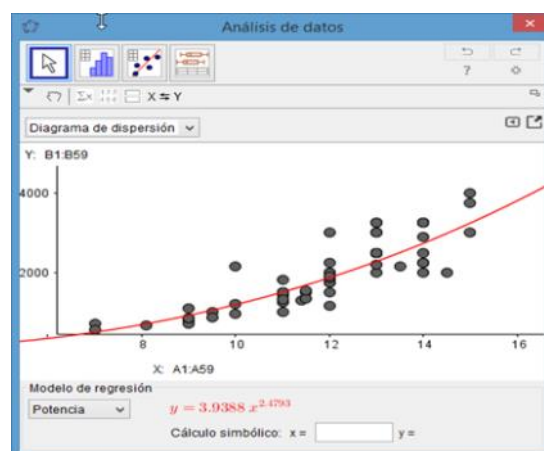


Figura No. 9. Curva de ajuste Altura - Peso

Discusión

Excel tiene predefinidos una serie de modelos que pueden utilizarse con seguridad, ya que además de presentar el gráfico de ajuste, muestra si se activa, el coeficiente de correlación.

El procedimiento consiste en seleccionar un gráfico de dispersión, con los datos iniciales, colocando las etiquetas adecuadas para cada uno de los ejes, dar clic sobre uno de los puntos y seleccionar agregar línea de tendencia, activar la opción exponencial y las cajas de presentar ecuación y el valor de R.

En cuanto a la relación longitud -peso [que además de describir el crecimiento relativo en peso, permite estudiar las variaciones espacio temporales en el factor de condición fisiológica, expresándose una sola ecuación:

$$P = 0.0051Lt^{3.2596}$$

El valor de $b > 3$ es indicativo de un crecimiento relativo en peso, alométrico.

Al relacionar las mediciones del Perímetro Opercular y el Peso Total para la totalidad de los organismos muestreados, se encontró una relación de tipo alométrica o potencial obteniéndose una correlación de 0.8351 considerada alta, lo cual nos indica la estrecha relación entre estas variables morfométricas.

Al relacionar el Peso con la Altura del cuerpo, se obtuvo una relación potencial con un coeficiente de correlación que revela una estrecha relación entre estas variables.

La aplicación de las matemáticas no tiene límite, en el campo de la enseñanza y de las ciencias, ya que tanto las utiliza un físico, un biólogo, ingeniero, economista, abogado, etc. Y las posibilidades de su aplicación también son muy amplias e indispensables en nuestro vivir cotidiano, es por eso que el alumno siempre deberá estar interesado en la práctica de las matemáticas y esto permitirá después guiarlos por el fascinante mundo del álgebra, geometría, etc., Conduciéndolos a una diversidad de aplicaciones modernas y útiles en su desempeño profesional (Arrieta, 2003).

Referencias Bibliográficas

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Disertación doctoral publicada, Cinvestav, México.

Aguilar, F. 2010. Modelos matemáticos no lineales como herramienta para evaluar el crecimiento de tilapia roja (*Oreochromis spp.*) y tilapia nilótica (*Oreochromis Niloticus* var. *chitralada*)" alimentadas con dietas peletizadas o extruidas. Universidad Nacional de Colombia, facultad de medicina veterinaria y de zootecnia departamento de ciencias para la producción animal Bogotá D.C. Tesis de Maestría, no publicada

Chavance, P. Flores, H. D., Yañez - Arancibia, A y Amescua, L. F. (1984). Ecología, biología y dinámica de poblaciones de *Bardiella chrysoura*, en la laguna de Términos, Sur del Golfo de México. An. Inst. Ciencias del Mar y Limnología. Universidad Nacional Autónoma de México. Mer., 21:153 - 159

El-Sayed, A.-F.M. 2006. *Tilapia Culture*. CABI Publishing. 277p

Gulland, J. A. 1983 *Fish Stock Assessment - A Manual of Basic Methods Vol 1* Wiley & Sons Chichester, 223 pp

Ricker, W. 1975. Computation and interpretation of biological statistics of fish populations. Bull. Fish. Res. Board Can. 191

Thornley, J.H.M., France, J. 2007. *Mathematical models in agriculture: quantitative methods for the plant, animal and ecological sciences*, 2nd edn. CAB

Internacional, Wallingford, UK.

Ulloa, J.; Rodríguez, J. 2013. La modelación matemática como puente entre el conocimiento científico y el matemático. Revista Electrónica de Veterinaria REDVET®. España Veterinaria.org ® - Comunidad Virtual Veterinaria.org ® - Veterinaria Organización S.L. Disponible en <http://www.veterinaria.org/revistas/redvet/n020213.html>

